POST-BAC · 1RE ANNÉE

PACK CHAPITRE · MATHÉMATIQUES

Équations différentielles

Premier et second ordre, coefficients constants et variables, seconds membres, conditions initiales, équations de la physique :
la méthode complète, pas à pas, en partant de zéro.



1 Six parties, du plus simple au plus complet

On part de la question « qu'est-ce qu'une équation différentielle ? » et l'on termine sur les circuits et les oscillateurs de la physique. Chaque partie contient le cours, des méthodes pas à pas, des questions express et des exercices corrigés ; deux sujets complets clôturent le pack.

2 Chaque méthode sur un exemple rédigé

Avant de te demander quoi que ce soit, le pack montre la méthode étape par étape, sur un exemple écrit comme sur une copie. **Chaque technique d'un exercice a été enseignée avant**, et chaque corrigé déroule le raisonnement en entier.

3 Pensé pour partir de zéro

Les outils nécessaires sont rappelés au moment où ils servent : dérivées, primitives, nombres complexes. Un test te dit par où commencer, et un **feu vert** en fin de partie te dit quand passer à la suivante.

4 L'essentiel pour réviser

Le formulaire réunit les vingt-deux cartes du cours, et les pages de plans de réponse montrent ce que ta copie doit contenir pour chaque type de question. Tu peux les photographier et les relire avant le devoir.

6	33	22	16
parties progressives	exercices corrigés pas à pas	cartes de cours	méthodes pas à pas

Pour la **première année après le bac** : classes préparatoires scientifiques, licence, BUT, BTS. Conforme au programme national des classes préparatoires (PCSI, arrêté du 5 janvier 2021, B.O. spécial n° 1 du 11 février 2021) : équations différentielles de la section « **Primitives et équations différentielles linéaires** » du programme de mathématiques, et des parties « Circuit linéaire du premier ordre » et « Oscillateurs libres et forcés » (régime libre, réponse à un échelon) du programme de physique. Un test de positionnement en page 3 t'indique par où commencer.

« L'inconnue est une fonction :
les conditions initiales choisissent la bonne. »

Génies des Sciences
Méthodes & entraînement · Post-bac
www.geniesdessciences.com

3 Par quelle partie commencer ?

CORRIGÉ FERMÉ

Ces seize questions balaient les six parties de ce pack, et les dérivées dont elles ont besoin. Réponds **sur une feuille**, sans regarder les réponses ; dans les propositions, λ et μ sont des réels quelconques. **Si tu hésites, laisse la ligne vide** plutôt que de répondre au hasard : c'est normal d'en laisser plusieurs la première fois. Ce test ne te note pas : il te dit seulement **par où commencer si tu ne peux pas tout reprendre**.

01 La dérivée de $x \longmapsto \mathrm{e}^{-3x}$ est :

a e^{-3x} b $-3\mathrm{e}^{-3x}$ c $-3x\mathrm{e}^{-3x}$

02 La dérivée de $x \longmapsto x\mathrm{e}^{2x}$ est :

a $2\mathrm{e}^{2x}$ b $2x\mathrm{e}^{2x}$ c $(1+2x)\mathrm{e}^{2x}$

03 L'équation $y'' + xy' = \cos(x)$ est :

a non linéaire, d'ordre 2 b linéaire, d'ordre 1 c linéaire, d'ordre 2

04 La fonction constante égale à 3 est solution de :

a $y' + 2y = 6$ b $y' = 3$ c $y' + y = 0$

05 Les solutions de $y' + 4y = 0$ sont les fonctions :

a $\lambda\mathrm{e}^{-4x}$ b $\lambda\mathrm{e}^{4x}$ c $\mathrm{e}^{-4x} + \lambda$

06 Une solution constante de $y' - 2y = 6$ est :

a 3 b -6 c -3

07 Pour $y' + y = \cos(x)$, on cherche une solution particulière de la forme :

a $A\cos(x)$ b $A\mathrm{e}^{x}$ c $A\cos(x) + B\sin(x)$

08 Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$ est :

a $\ln(1+x^2)$ b $\dfrac{1}{1+x^2}$ c $2\ln(x)$

09 Les solutions de $y' + 2xy = 0$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions :

a $\lambda\mathrm{e}^{-2x}$ b $\lambda\mathrm{e}^{x^2}$ c $\lambda\mathrm{e}^{-x^2}$

10 Sur $]0\,;+\infty[$, l'équation $xy' + y = 1$ s'écrit aussi :

a $y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{1}{x}$ b $y' + y = \dfrac{1}{x}$ c $y' + xy = 1$

11 L'équation caractéristique de $y'' + 9y = 0$ est :

a $r^2 + 9 = 0$ b $r^2 + 9r = 0$ c $r + 9 = 0$

12 Si l'équation caractéristique de $ay'' + by' + cy = 0$ a une racine double r_0, les solutions de cette équation sont :

a $\lambda\mathrm{e}^{r_0 x}$ b $(\lambda x + \mu)\mathrm{e}^{r_0 x}$ c $\lambda\mathrm{e}^{r_0 x} + \mu\mathrm{e}^{-r_0 x}$

13 Pour $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{x}$, sachant que 1 est racine simple de $r^2 - 3r + 2 = 0$, on cherche une solution particulière de la forme :

a $Ax\mathrm{e}^{x}$ b $A\mathrm{e}^{x}$ c $Ax^2\mathrm{e}^{x}$

14 Dans un problème de Cauchy, les conditions initiales s'appliquent :

a à la seule partie homogène y_h b à la solution générale $y_p + y_h$ c à la solution particulière y_p

15 Dans un circuit RC série, la constante de temps τ vaut :

a $\dfrac{R}{C}$ b RC c $\dfrac{1}{RC}$

16 Un oscillateur amorti de facteur de qualité $Q = 5$ a un régime :

a apériodique b critique c pseudo-périodique

QUESTIONS	PARTIE	SI TU EN RATES UNE, OU LA LAISSES VIDE, REVOIS…
01, 02	1	les dérivées de la carte F2, avant tout le reste
03, 04	1	le vocabulaire et la vérification d'une solution
05, 06, 07	2	le premier ordre à coefficients constants
08, 09, 10	3	les primitives et les coefficients variables
11, 12	4	l'équation caractéristique et ses trois cas
13, 14	5	les seconds membres et les problèmes de Cauchy
15, 16	6	les circuits et les oscillateurs

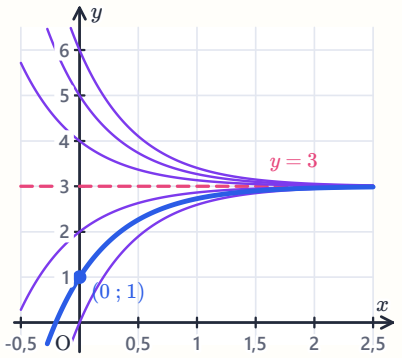
Comment lire ton résultat

Les réponses sont en tête des corrigés, page 62 : ne les consulte qu'une fois tes seize lignes remplies ou laissées vides. Compte tes réponses justes ; une ligne vide ne compte pas.

De 14 à 16 justes : va directement aux exercices à trois étoiles et aux deux sujets. **De 9 à 13 justes :** commence par la première partie où tu as une question fausse ou vide, puis continue dans l'ordre. **8 justes ou moins :** fais les six parties dans l'ordre ; c'est pour ce parcours que le pack est écrit. **Si tu n'as jamais étudié les équations différentielles**, commence par la partie 1, quel que soit ton score.

Chaque valeur de λ donne une solution, donc une courbe. La figure en montre six, avec la droite d'équation $y = 3$, qui est la solution obtenue pour $\lambda = 0$: les six courbes se rapprochent de cette droite quand x grandit, parce que e^{-2x} devient très petit. La partie 2 démontrera que ce sont les seules solutions.

Imposer la **condition initiale** $y(0) = 1$, c'est choisir la courbe qui passe par le point de coordonnées $(0\,;\,1)$: comme $y(0) = \lambda \mathrm{e}^0 + 3 = \lambda + 3$, la condition s'écrit $\lambda + 3 = 1 \iff \lambda = -2$ (le symbole $\iff$ se lit « équivaut à »). La solution choisie est $y(x) = 3 - 2\mathrm{e}^{-2x}$, c'est la fonction f de la section 2.



Des solutions de $y' + 2y = 6$: en bleu, celle qui vérifie $y(0) = 1$; en violet, d'autres valeurs de λ ; en rose, la droite d'équation $y = 3$ ($\lambda = 0$).

F4 LES CONDITIONS INITIALES DÉSIGNENT UNE SEULE SOLUTION — PAR CŒUR

Au premier ordre : si a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I, alors pour tout x_0 de I et tout réel y_0, l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ a une et une seule solution sur I telle que $y(x_0) = y_0$. Au second ordre : si a, b, c sont des réels avec $a \neq 0$ et si f est continue sur I, alors pour tout x_0 de I et tous réels y_0 et y_1, l'équation $ay'' + by' + cy = f(x)$ a une et une seule solution sur I telle que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$.

Une équation accompagnée de sa ou de ses conditions initiales s'appelle un **problème de Cauchy**, et ce résultat est le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire. Au premier ordre, il se démontre à partir de la forme des solutions : tu le feras en partie 2 (coefficients constants), puis en partie 3 (cas général). Au second ordre, il est admis (sa démonstration est hors programme), et les deux conditions portent sur le **même** point x_0, l'une sur y, l'autre sur y'. Le mot « initiale » vient de la physique, où x_0 est l'instant de départ ; mais x_0 peut être n'importe quel point de I, et une condition peut être posée en 1 plutôt qu'en 0. L'indice de x_0 se lit « x zéro ». Deux conditions d'application comptent : l'équation est écrite avec y' seul devant (pour l'ordre 2, y'' multiplié par un nombre non nul), et l'on travaille sur un **intervalle** où les coefficients et le second membre sont continus. La partie 3 montre ce qui arrive quand le coefficient de y' s'annule.

5 Traduire une situation par une équation

COURS

Dans un milieu favorable, une population de bactéries augmente d'autant plus vite qu'elle est nombreuse : deux fois plus de bactéries donnent deux fois plus de divisions dans le même temps. Si $N(t)$ désigne l'effectif au bout de t heures, la vitesse d'augmentation est la dérivée $N'(t)$, et la phrase « la vitesse est proportionnelle à l'effectif » s'écrit $N'(t) = kN(t)$, où k est un nombre strictement positif. Une grandeur qui **diminue** a une dérivée négative : un échantillon radioactif dont le nombre de noyaux $N(t)$ diminue à une vitesse proportionnelle à $N(t)$ vérifie $N'(t) = -kN(t)$, avec $k > 0$.

6 Les méthodes, pas à pas

MÉTHODE

1 Vérifier qu'une fonction est solution

1. **Je justifie que la fonction est dérivable, puis je calcule ses dérivées.**
   Une fois sur l'intervalle pour une équation d'ordre 1, deux fois pour une équation d'ordre 2, par exemple comme produit de fonctions qui le sont. Puis je calcule y', et y'' à l'ordre 2, avec les règles de la carte F2, chacune sur sa propre ligne.
2. **Je remplace dans le membre de gauche, puis je simplifie.**
   J'écris chaque terme en entier avant de réduire, et je mets en facteur l'exponentielle commune quand il y en a une.
3. **Je compare au membre de droite, pour tout x de l'intervalle.**
   L'égalité doit être vraie pour toutes les valeurs de x, pas seulement pour une ou deux.

L'EXEMPLE RÉDIGÉ

Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ est solution de $y'' + 2y' + y = 0$.

La fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, comme produit de $x \longmapsto x$ et de $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$. Par la dérivée d'un produit, $g'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} = (1 - x)\mathrm{e}^{-x}$. Puis, avec $u(x) = 1 - x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$, donc $u'(x) = -1$ et $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$:
$g''(x) = -\mathrm{e}^{-x} + (1 - x)\left(-\mathrm{e}^{-x}\right) = (x - 2)\mathrm{e}^{-x}$.

$g''(x) + 2g'(x) + g(x) = (x - 2)\mathrm{e}^{-x} + 2(1 - x)\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} = (x - 2 + 2 - 2x + x)\mathrm{e}^{-x} = 0$.

2 Vérifier en un seul point

✗ « Pour $x = 1$, la fonction $x \longmapsto x^2$ donne une dérivée 2 et un double 2 : elle est solution de $y' = 2y$. » · ✓ Sa dérivée est $2x$ et son double est $2x^2$: ces deux nombres ne sont égaux que pour $x = 0$ et $x = 1$. La fonction n'est pas solution sur $\mathbb{R}$.

Le réflexe : une solution vérifie l'égalité pour **tout** x de l'intervalle ; un calcul en un point peut seulement prouver qu'une fonction n'est pas solution.

3 Croire qu'une équation d'ordre 1 est linéaire

✗ « $y' = y^2$ est linéaire, car c'est une équation d'ordre 1. » · ✓ L'ordre et la linéarité sont deux questions différentes. Le carré rend cette équation non linéaire, et aucune méthode de résolution de ce pack ne s'y applique.

Le réflexe : cherche un y^2, un produit yy' ou un y dans une fonction ; s'il y en a un, l'équation n'est pas linéaire (carte F3).

4 Donner une seule solution quand on demande de résoudre

✗ « La solution de $y' = 2y$ est $x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}$. » · ✓ Les solutions sont les fonctions $x \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{2x}$, pour λ réel (la partie 2 le démontre, carte F5). Une copie qui n'en donne qu'une n'a pas résolu l'équation.

Le réflexe : « résoudre » demande toutes les solutions, avec leur constante ; « déterminer la solution qui vérifie… » en demande une seule (carte F4).

8 Les questions express

DE TÊTE

1. Quel est l'ordre de l'équation $y'' - 3y' = x$?
2. L'équation $y' = xy$ est-elle linéaire ?
3. L'équation $y' + y^2 = 0$ est-elle linéaire ?
4. L'équation $y' + 5y = 0$ a-t-elle un second membre ?
5. La fonction constante égale à 2 est-elle solution de $y' + 3y = 6$?
6. Quelle est la dérivée de $x \longmapsto \mathrm{e}^{-4x}$?
7. Quelles conditions initiales désignent une seule solution d'une équation du second ordre à coefficients constants ?
8. La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est-elle solution de $y'' = y$?

Cache cette ligne pendant que tu réponds. **Réponses :** 1. ordre 2 · 2. oui, le coefficient x est une fonction de x · 3. non, à cause du carré · 4. non, elle est homogène · 5. oui, car $0 + 3 \times 2 = 6$ · 6. $\left(\mathrm{e}^{-4x}\right)' = -4\mathrm{e}^{-4x}$ · 7. deux conditions au même point x_0, sur $y(x_0)$ et sur $y'(x_0)$ · 8. oui, ses dérivées première et seconde sont égales à e^x

9 Exercices

DU PLUS SIMPLE AU PLUS COSTAUD

Exercice 1 — Vérifier des solutions

★☆☆ ▢

Dans chaque cas, dire si la fonction proposée, définie sur $\mathbb{R}$, est solution de l'équation sur $\mathbb{R}$, en justifiant par le calcul.

1. $f_1(x) = \mathrm{e}^{3x}$ et l'équation $y' - 3y = 0$.
2. $f_2(x) = 2x + 1$ et l'équation $y' + y = 2x + 3$.
3. $f_3(x) = \cos(2x)$ et l'équation $y'' + 4y = 0$.
4. $f_4(x) = x^2$ et l'équation $xy' - 2y = 0$.
5. $f_5(x) = \mathrm{e}^x$ et l'équation $y'' + y = 0$.

Exercice 2 — Classer des équations

★☆☆ ▢

On considère les six équations suivantes, d'inconnue y : (a) $y' = 3y$; (b) $y'' + y' = x^2$; (c) $xy' + y = \ln(x)$, sur $]0\,;+\infty[$; (d) $y' = y^2$; (e) $y'' + \sin(y) = 0$; (f) $(1 + x^2)y' - 2xy = 0$.

1. Donner l'ordre de chaque équation.

Les corrigés détaillés

La rédaction modèle est à gauche, les remarques du professeur à droite. Compare **ta rédaction**, pas seulement tes résultats : un raisonnement qu'on peut suivre vaut plus qu'une réponse posée seule.

Les réponses du test de positionnement (page 3)

01. b, car $\left(\mathrm{e}^{-3x}\right)' = -3\mathrm{e}^{-3x}$ · **02.** c, car $\left(x\mathrm{e}^{2x}\right)' = \mathrm{e}^{2x} + 2x\mathrm{e}^{2x} = (1+2x)\mathrm{e}^{2x}$ · **03.** c, la dérivée la plus haute est y'', et y', y'' n'y apparaissent qu'au premier degré (carte F3) · **04.** a, car $0 + 2 \times 3 = 6$ · **05.** a (carte F5) · **06.** c, car $0 - 2 \times (-3) = 6$ · **07.** c, il faut les deux termes (carte F7) · **08.** a, car $\left(\ln(1+x^2)\right)' = \dfrac{2x}{1+x^2}$ · **09.** c, une primitive de $2x$ est x^2 (carte F10) · **10.** a, on divise par x, qui ne s'annule pas sur $]0\,;+\infty[$ (carte F11) · **11.** a, le terme y'' donne r^2 et le terme $9y$ donne 9 (carte F13) · **12.** b (carte F14) · **13.** a (carte F17) · **14.** b (méthode 13) · **15.** b (carte F19) · **16.** c, car $Q = 5 > \dfrac{1}{2}$ (carte F21)

Comment lire un corrigé



Chaque dérivée est posée sur sa ligne, chaque solution particulière est cherchée avec sa forme écrite avant le calcul, et chaque constante est fixée à la fin, sur la solution générale, solution particulière comprise. **Ce n'est pas du remplissage** : c'est ce qui permet au correcteur de suivre ton raisonnement, et de te donner des points même si une erreur de calcul s'est glissée en route.

Quand ta réponse diffère de la mienne, cherche d'abord **où** les deux chemins se séparent. C'est ce point précis qu'il faut retravailler, pas l'exercice entier. Avant de comparer, relis ta copie avec les vérifications de la page 98.

1 Partie 1 · Ce qu'est une équation différentielle

EXERCICES 1 À 5

Exercice 1 — Vérifier des solutions ★

1. La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f_1'(x) = 3\mathrm{e}^{3x}$, donc $f_1'(x) - 3f_1(x) = 3\mathrm{e}^{3x} - 3\mathrm{e}^{3x} = 0$ **(F2)**.
   La fonction f_1, définie par $f_1(x) = \mathrm{e}^{3x}$, est solution de $y' - 3y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction affine f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f_2'(x) = 2$, donc $f_2'(x) + f_2(x) = 2 + 2x + 1 = 2x + 3$, qui est bien le second membre.
   La fonction f_2, définie par $f_2(x) = 2x + 1$, est solution de $y' + y = 2x + 3$ sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction f_3 est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f_3'(x) = -2\sin(2x)$, puis $f_3''(x) = -4\cos(2x)$. Alors $f_3''(x) + 4f_3(x) = -4\cos(2x) + 4\cos(2x) = 0$.
   La fonction f_3, définie par $f_3(x) = \cos(2x)$, est solution de $y'' + 4y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
4. La fonction f_4 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f_4'(x) = 2x$, donc $xf_4'(x) - 2f_4(x) = 2x^2 - 2x^2 = 0$, y compris pour $x = 0$.
   La fonction f_4, définie par $f_4(x) = x^2$, est solution de $xy' - 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
5. La fonction f_5 est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f_5'(x) = \mathrm{e}^x$ et $f_5''(x) = \mathrm{e}^x$, donc $f_5''(x) + f_5(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^x$. Ce nombre est strictement positif, puisqu'une exponentielle l'est : il ne vaut jamais 0.
   La fonction f_5 n'est pas solution de $y'' + y = 0$.

Pour dire non, un point suffit

Dans la question 5, il suffirait d'écrire qu'en $x = 0$, le membre de gauche vaut $2\mathrm{e}^0 = 2$ et non 0. Pour dire **oui**, en revanche, l'égalité doit être établie pour tout x.

Un coefficient qui s'annule

Dans la question 4, le coefficient de y' est x, qui vaut 0 en $x = 0$. La vérification reste valable sur $\mathbb{R}$, mais une telle équation cache des surprises : l'exercice 16 de la partie 3 revient sur elle.